Kompleks Fonk. Teo. Giriş Dersi Bütünleme Sınavı Yanıt Anahtarı

1) $z+i+1=u$ denirse $u^3+1=0$ olur. $\Rightarrow u^3=-1=\cos\pi+i\sin\pi$

$\Rightarrow u_k=\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)$, $k=0,1,2.$

$k=0$ için $u_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=z_0+i+1 \Rightarrow z_0=-\frac{1}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$

$k=1$ için $u_1=\cos\pi+i\sin\pi=z_1+i+1 \Rightarrow z_1=-2-i$

$k=2$ için $u_2=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=z_2+i+1 \Rightarrow z_2=-\frac{1}{2}-i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$

$\Rightarrow$ Ç.K $=\{z_0, z_1, z_2\}$ bulunur.

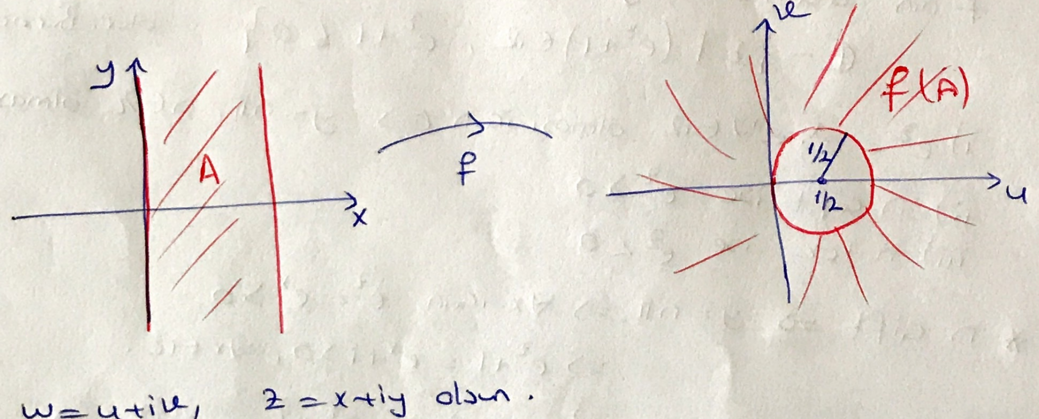
2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{3-4i}=e^{(3-4i)\operatorname{Log}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)}$

$=e^{(3-4i)\left(\ln\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right|+i\operatorname{Arg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)}$

$=e^{(3-4i)\left(\ln 1+i\cdot\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$

$=e^{-3\pi-\frac{9\pi}{4}i}$

$\operatorname{Arg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\arctan 1-\pi$
$=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$

3) 

$w=u+iv$, $z=x+iy$ olsun.

$w=1-\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{1}{1-w} \Rightarrow x+iy=\frac{1}{1-(u+iv)}=\frac{1}{(1-u)+iv}$

$=\frac{(1-u)-iv}{(1-u)^2+v^2}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1-u}{(1-u)^2+v^2}, \qquad y = \frac{v}{(1-u)^2+v^2}$$

$$0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1-u}{u^2+v^2-2u+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow u^2+v^2-2u+1 \geq 1-u$$

$$\Rightarrow u^2+v^2-u \geq 0 \quad \cdots (*)$$

$$u^2+v^2-u=0 \Rightarrow u^2+v^2-u+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ (*) denklemi $(\frac{1}{2}, 0)$ merkezli $r=\frac{1}{2}$ yarıçaplı

Çember denklemidir. Yine (*) denkleminden aranan

bölge şekildeki taralı $f(A)$ bölgesidir.

4) $$f(z) = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(e^z+1)}$$ şeklinde yazılabilir.

$\operatorname{Log} z$ nin analitik olduğu bölge $\mathbb{C}-(-\infty, 0]$ dı. O halde

f nin analitik olduğu bölge

$$\mathbb{C}-\{z \mid (e^z+1) \in \mathbb{R},\ e^z+1 \leq 0\}$$ olur. Buradan

i) $e^z = e^x \cdot e^{iy} \in \mathbb{R}$ olması için $\Leftrightarrow$ $y = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ olmasıdır.

ii) n çift ise $e^z > 0$

iii) n tek ise $e^z < 0$

* n çift ve $y = n\pi \Rightarrow \forall x$ için $e^z = e^x > 0$

$$\Rightarrow e^z+1 = e^x+1 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

* n tek ve $y = n\pi \Rightarrow e^z = -e^x \Rightarrow e^z+1 = -e^x+1 \leq 0$

olması için $\Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ olmasıdır.

Böylece analitiklik bölgesi;

$$\mathbb{C}-\{z \mid x \geq 0,\ y=(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$ kümesidir.

5) $f(z)=\dfrac{\bar{z}^3}{z^2}$, $\mathbb{C}-\{0\}$ da süreklidir. $z=0$ noktasındaki

sürekliliğine bakalım:

$z=0$ noktasında

$$\lim_{z\to 0}|f(z)|=\lim_{z\to 0}\left|\frac{\bar{z}^3}{z^2}\right|=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^3}{|z|^2}=\lim_{z\to 0}|z|=0$$

olup, buradan $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=0=f(0)$ bulunur. O halde f,

$z=0$ noktasında da süreklidir. Böylece f, $\mathbb{C}$ üzerinde

süreklidir.

6. a) $f_x+if_y=0 \iff (u_x+iv_x)+i(u_y+iv_y)=0$

$\iff u_x+iv_x+iu_y-v_y=0$

$\iff (u_x-v_y)+i(v_x+u_y)=0$

$\iff u_x-v_y=0$ ve $v_x+u_y=0$

$\iff u_x=v_y,\ u_y=-v_x$ (C-R denk.)

b) $z\neq 0$ için , $(z=x+iy)$

$$f_x+if_y=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{z}^3}{z^2}\right)+i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\bar{z}^3}{z^2}\right)$$

$$=\left(\frac{3\bar{z}^2}{z^2}-\frac{2\bar{z}^3}{z^3}\right)+i\left(-\frac{3i\bar{z}^2}{z^2}-\frac{2i\bar{z}^3}{z^3}\right)$$

$$=\frac{6\bar{z}^2}{z^2}\neq 0$$

olup, a'dan dolayı C-R denklemleri sağlanmaz. O halde f fonksiyonu $\mathbb{C}-\{0\}$ da türevlenemez.

Şimdi $z=0$ daki türevlenebilirliğine bakalım.

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^3}{z^3}$$

olup, eğer sağ taraftaki limit varsa, f, z=0 noktasında türevlenebilirdir.

$z = x+iy$ olsun. $y=0$ ve $x \to 0$ ise

$$\lim_{z=x\to 0} \frac{\bar{z}^3}{z^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$x=0$, $y \to 0$ ise

$$\lim_{z=yi\to 0} \frac{\bar{z}^3}{z^3} = \lim_{y\to 0} \frac{(-iy)^3}{(iy)^3} = -1$$

olup, $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^3}{z^3}$ limiti yoktur. O halde $f'(0)$ türevi yoktur.

Dolayısıyla f fonksiyonu hiçbir yerde türevlenemez.